VI

FORMA DE LA SUPERFICIE ESPACIO-TIEMPO

DE

DOS DIMENSIONES DE UN CAMPO GRAVITACIONAL

PROVENIENTE DE UNA MASA PUNTIFORME

Por el doctor ENRIQUE LOEDEL PALUMBO

RESUMÉ

La forme de la surface espace-temps de deux dimensions provenantes d'une masse gravitationel punctiforme. — Il s'agit de trouver la forme géométrique de la surface espace-temps de deux dimensions supposant que dans l'origine de coordonnées polaires, se trouve une masse gravitationelle punctiforme. Des coordonnées r, θ, φ et t, cette dernière le temps, on suppose constantes θ et φ, et c'est pourquoi l'espace proprement dit reste réduit à une seule dimension (r), qu'avec la dimension temporale constitue une surface non euclidienne de deux dimensions. Avec a nous passons de la formule (1) a la (2), et il s'agit maintenant d'obtenir une image de cette urface dans un espace euclidien de trois dimensions, caractérisé par la formule (4). La formule (3) c'est la même que la (2) ayant prie seulement d'elle le temps imaginaire au lieu du temps réel t.

Les formules (5) réprésentent les équations paramétriques de la surface; et remplaçant dans la (4) dx^2, dy^2, dz^2 par les valeurs correspondantes obtenues de la (5), et identifiant les coefi-cients avec (3) on obtient le système d'équations différentielles (6), pour lesquelles constituent une solution les formules (10) qui reppresentent une surface de révolution autour de l'axe z, dont sa génératrice est donnée par la (12) moyennant le change de variables indiqué dans la (11). La figure 1 réprésente cette surface en projection verticale et horizontale; les lignes du temps $r =$ const. sont des circonférences avec centre dans l'axe des z, et les lignes $t =$ const. sont des méridiens de la surface.

Un corps partant sans vitesse initiale d'un point quelconque de cette surface parcourira une géodésique de la même tangente à la ligne du temps dans ce point. Dans la figure, la courbe ABC, A'B'C' represente une géodésique de la surface. Par ce moyen nous avons une image qui nous permet de constater qu'un champ gravitationel n'est qu'une manifestation de l'estructure non euclidienne de l'espace. En plus, la variation, dans la mesure d'un certain intervale de temps ou d'une longitude dans un champ gravitationel, conséquence de la théorie généralisée de la rélativité, peut se voir géométriquement au moyen de cette réprésentation, qualitative et quantitativement.

La courbure gaussienne est donnée par la formule (17) et l'on voit qu'elle est nulle dans l'infinit, c'est-à-dire, ou, comme, l'on devait le supposer, la surface est euclidienne et, dans notre cas, cylindrique.

Également on peut obtenir une réprésentation de la surface donnée par la (2), avec le temps réel, prénant pour l'espace euclidien l'axe $\zeta = iz$, et on obtient ainsi la surface représentée dans la figure 2, dont la génératrice est exprimée par la (20).

FORMA DE LA SUPERFICIE ESPACIO-TIEMPO

DE

DOS DIMENSIONES DE UN CAMPO GRAVITACIONAL

PROVENIENTE DE UNA MASA PUNTIFORME [1]

Se sabe, que según la teoría de la gravitación de Einstein, ésta no es más que la manifestación de la estructura no euclideana del universo. La trayectoria de un cuerpo libre sería una geodésica de la variedad espacio-tiempo no euclídea de cuatro dimensiones. Con esto, el problema de la gravitación es un problema puramente geométrico. La ley de la gravitación de Einstein, expresada simbólicamente $G_{rs} = 0$, donde G_{rs} es el tensor de Rieman-Christoffel contraído, conduce a admitir como expresión del elemento lineal ds^2 de la variedad espacio-tiempo, la siguiente expresión, debida a Schwarzschild [2] :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right) dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2) - \frac{1}{1 - \frac{2km}{c^2 r}} dr^2 \qquad (1)$$

si es que en el origen de coordenadas polares r, θ y φ, y t existe la masa m; k es la constante newtoniana y c la velocidad de la luz.

Haciendo $c = 1$, $2km = A$ y tomando $\theta = \text{const.}$ y $\varphi = \text{const.}$, resulta :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{A}{r}} dr^2 \qquad (2)$$

(1) La idea de este trabajo le fué propuesta a Einstein por el autor con motivo de la recepción que le hiciera la Academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Buenos Aires al ilustre físico, el año próximo pasado, aprovechando su estada entre nosotros. Por ese entonces no había integrado aún las ecuaciones (6), resultado al que llegué más tarde.

(2) Véase, por ejemplo : EDDINGTON, *Espace, Temps et gravitation* (parte teórica, págs. 67 y sig., 1921).

que es la expresión del elemento de una superficie de dos dimensiones. Las geodésicas de esta superficie serán las líneas de universo que siguen los cuerpos al caer, cuando la velocidad inicial es cero o tiene la dirección de r.

Para poder representarnos esta superficie y tener con ello una imagen concreta de la misma que nos permita *ver* la causa de la aparente atracción que origina la caída de los cuerpos, la sumergiremos en un espacio euclideano de tres dimensiones.

Para convertir en real la superficie expresada por la (2) tomaremos $t = i\tau$ y cambiando el signo de ds^2 tendremos :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) d\tau^2 + \frac{1}{1 - \frac{A}{r}} dr^2. \tag{3}$$

Sean x, y, z las coordenadas cartesianas ortogonales de nuestro espacio de tres dimensiones donde queremos introducir la superficie dada por (3), será :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4}$$

donde x, y, z serán ciertas funciones de τ y r :

$$\begin{aligned} x &= X(\tau r) \\ y &= Y(\tau r) \\ z &= Z(\tau r), \end{aligned} \tag{5}$$

que habrá que determinar para conocer la superficie. Por las (5) tenemos :

$$dx^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial X}{\partial \tau}\frac{\partial X}{\partial r} d\tau dr + \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 dr^2$$

$$dy^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial Y}{\partial r} d\tau dr + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 dr^2$$

$$dz^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial Z}{\partial r} d\tau dr + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 dr^2.$$

Sumando e identificando los coeficientes con (3), resulta :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^2 &= 1 - \frac{A}{r} \\ \frac{\partial X}{\partial \tau}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial Z}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{A}{r}},$$

sistema de ecuaciones que debemos integrar para obtener las funciones (5).

Pongamos :

$$\begin{aligned} X &= \varphi(r) \,.\, \cos\tau \\ Y &= \varphi(r) \,.\, \operatorname{sen}\tau \\ Z &= f(r), \end{aligned} \tag{7}$$

donde si Z es función de r solamente la segunda ecuación de las (6), la de ortogonalidad, queda idénticamente satisfecha. Reemplazando en la primera de dichas ecuaciones resulta :

$$\varphi(r) = \sqrt{1 - \frac{A}{r}}, \tag{8}$$

y reemplazando ahora en la última de las mencionadas ecuaciones teniendo en cuenta (7) y (8) obtenemos :

$$\left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{4r^4 - A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)}. \tag{9}$$

Siendo, por tanto, las funciones que buscábamos, las siguientes :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{1 - \frac{A}{r}} \cdot \cos\tau \\ Y &= \sqrt{1 - \frac{A}{r}} \cdot \operatorname{sen}\tau \\ Z &= \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{4r^4 - A^2}{r^3(r - A)}}\, dr. \end{aligned} \tag{10}$$

Como es :

$$X^2 + Y^2 = 1 - \frac{A}{r}; \qquad r = \frac{A}{1 - (X^2 + Y^2)},$$

y Z es función de r solamente, las (10) representan una superficie de revolución al rededor del eje Z.

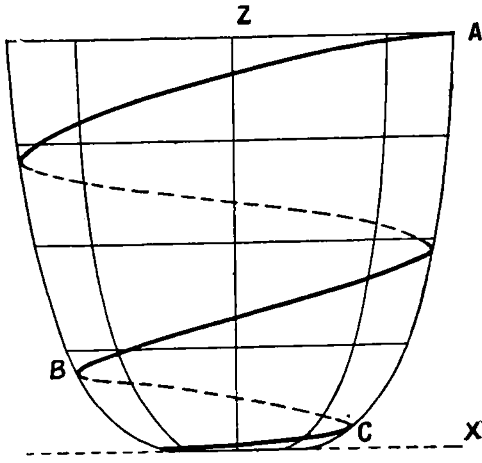
Tomando :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{1 - \frac{A}{r}}; \qquad r = \frac{A}{1 - R^2} \tag{11}$$

la expresión de Z será :

$$Z = \int \sqrt{\frac{4A^2 - (1 - R^2)^4}{(1 - R^2)^4}} \, dR, \tag{12}$$

donde tenemos valores reales de $\frac{dZ}{dR}$ para valores de R^2 comprendidos :



$$1 - \sqrt{2A} \leq R^2 \leq 1, \tag{13}$$

y por (11) las variaciones correspondientes de r serán :

$$\sqrt{\frac{A}{2}} \leq r \leq \infty \tag{14}$$

para $R^2 = 1 - \sqrt{2A}$, $\frac{dZ}{dR} = 0$ y para $R^2 = 1$, $\frac{dZ}{dR} = \infty$ es pues en el intervalo (13)

$$\frac{dZ}{dR} > 0$$

(tomando el signo positivo para el radical, es decir considerando una sola rama de la curva) como además en el intervalo (13) es :

$$\frac{d^2Z}{dR^2} > 0$$

la curva será cóncava respecto a Z.

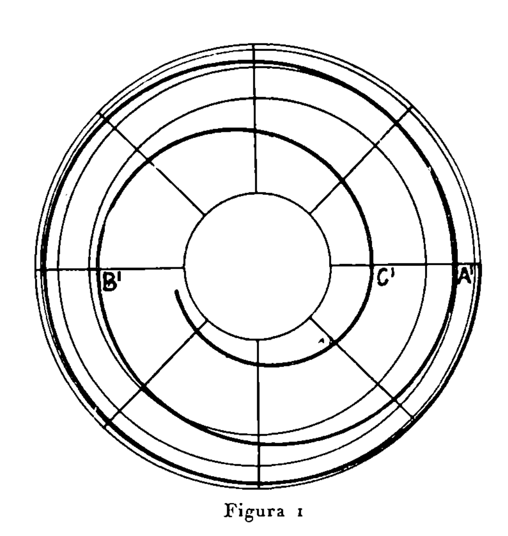


Figura 1

Con lo dicho podremos tener una idea de la superficie que dibujamos en la figura 1. Las líneas $R = \text{const.}$ serían las líneas del tiempo, representadas por circunferencias de centro en el eje de las z, y los distintos meridianos de la superficie serían las líneas $t = \text{const.}$ La trayectoria de un cuerpo que parte de A con velocidad nula, sería la geodésica que pasa por A tangente a la línea del tiempo en ese punto, geodésica representada por la curva A, B, C, ..., y en planta por A′, B′, C′, ... Como hemos hecho $C = 1$, la geodésica de un rayo luminoso cortaría aproximadamente a 45° a las líneas del tiempo.

Por las (10) vemos que el tiempo τ se comporta como un arco de circunferencia. Para $r = \infty$ es $R = 1$ y la longitud del arco, que mide en el infinito el tiempo, sería igual al ángulo α formado por dos curvas meridianas, pero a una distancia R de Z el tiempo correspondiente τ' estará expresado :

$$\tau' = R \cdot \alpha = R \cdot \tau$$

y siendo

$$R = \sqrt{1 - \frac{A}{r}}$$

$$\tau' = \sqrt{1 - \frac{A}{r}} \cdot \tau. \qquad (15)$$

Por lo tanto, con nuestra representación geométrica se interpretan de un modo muy claro todas las consecuencias de la teoría de la gravitación de Einstein, en las cuales no intervienen más que las coordenadas r y t.

Para $R = 1$, $r = \infty$ la superficie es cilíndrica, es decir, de curvatura total nula, equivalente por tanto intrínsicamente a un plano, y las geodésicas que serían hélices se convierten en rectas al aplicar dicha superficie sobre un plano. Por consiguiente, y como era de esperar, dicha superficie es euclídea en el infinito.

Por la (3) puede calcularse la curvatura gaussiana de dicha superficie por medio de la fórmula (¹) :

$$K = \frac{(12, 12)}{g} \qquad (16)$$

siendo (12, 12) el único símbolo de Riemann de primera especie que no se anula y g el discriminante de la forma cuadrática fundamental. Así resulta :

$$K = \frac{A}{r^3}. \qquad (17)$$

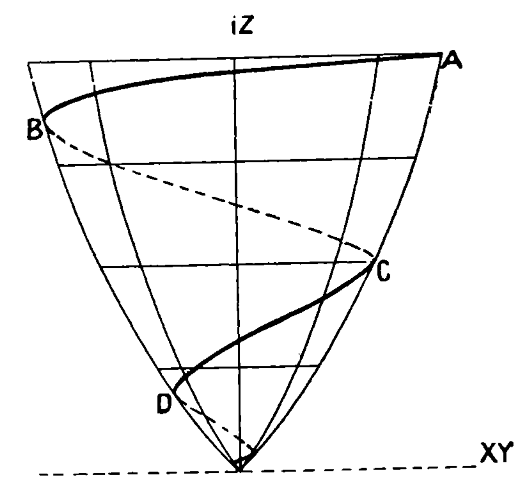
En el caso de la Tierra $A = 1$ [cm] y la curvatura de la variedad espacio-tiempo producida por el campo gravitacional de la Tierra es en su superficie aproximadamente :

$$K = 3,9 \cdot 10^{-27} \, [\text{cm}^{-2}]$$

por lo cual podrá considerarse como euclideana en una pequeña región, lo que no impide, sin embargo, que sea esta curvatura la causa de la gra-

(¹) Véase, por ejemplo, MARCOLONGO, *Relatività*, Messina, páginas 19 y siguientes, 1923.

vitación, pues recorremos en el tiempo distancias enormes dado que un segundo equivale a 300000 kilómetros, lo que significa, ya que un cuerpo al caer recorre aproximadamente cinco metros en el primer segundo, que la geodésica de caída se aparta de la línea del tiempo en los primeros 300 millones de metros a partir del punto de tangencia común, sólo cinco metros.



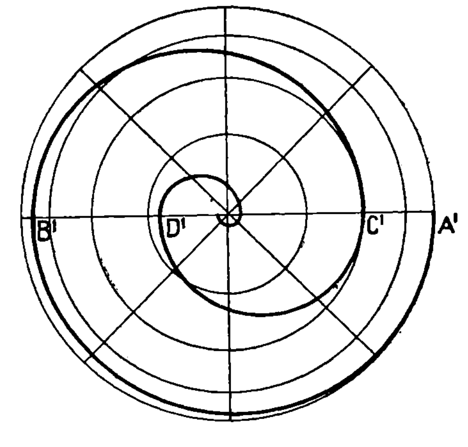
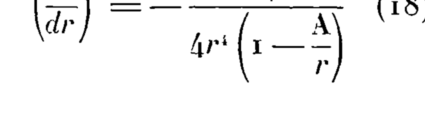


Figura 2

La presente representación geométrica puede lograrse también usando el tiempo real t, es decir, partiendo de la (2) en lugar de hacerlo de la (3).

Siguiendo el mismo camino obtendríamos para X e Y las mismas expresiones (10) y para $\frac{dZ}{dr}$ en lugar de (9) tendríamos :



$$\left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = -\frac{4r^4 + A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)} \quad (18)$$

y tomando $\zeta = iZ$ resulta :

$$\frac{d\zeta}{dr} = \sqrt{\frac{4r^4 + A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)}}, \quad (19)$$

y expresando ζ en función de R resulta en lugar de (12) :

$$\zeta = \int \sqrt{\frac{4A^2 + (1 - R^2)^4}{(1 - R^2)^4}}\, dR \quad (20)$$

la ventaja de representar así la superficie es que se tienen valores reales de ζ para valores de R comprendidos :

$$0 \leq R \leq 1$$

lo que hace que el campo de variabilidad de r sea en lugar de (14) :

$$A \leq r \leq \infty.$$

En este caso, para $R = 0$ es :

$$\frac{d\zeta}{dR} = \sqrt{4A^2 + 1}$$

y como A es muy pequeño, el ángulo que forma en el origen la curva generatriz será muy próxima de 45°. Del mismo modo que en el caso anterior es ahora para $R = 1$ $\frac{d\zeta}{dR} = \infty$. Para $R = 0$ es también

$$\frac{d^2\zeta}{dR^2} = 0,$$

es decir, tenemos un punto de inflexión en el origen. En la figura 2 representamos a la superficie no dibujando la parte que corresponde a la ζ negativas. Por último la expresión de ζ en función de R es, haciendo $\alpha = 4A^2$:

$$\zeta = \sqrt{1 + \alpha} \,.\, R + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \frac{!4}{!3} \cdot \frac{R^3}{!3} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} 2 (2 \times 2 - 1) \frac{!5}{!3} \frac{R^5}{!5} +$$

$$\ldots + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} 2^{n-1} (2n - 1) \frac{!(n+3)}{!3} \frac{R^{2n+1}}{!(2n+1)} + \ldots$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \left[\frac{1+\alpha}{\alpha} R + \frac{2}{3} R^3 + R^5 + \frac{10}{21} R^7 + \frac{7}{54} R^9 + \ldots \right],$$

serie uniformemente convergente en el intervalo

$$0 < R < 1.$$

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO.

(Entregado a la secretaría de la Facultad el 18 de mayo de 1926; impreso en agosto de 1926.)